Revista de la Universidad de La Salle

Volume 2009 | Number 50 Article 21

January 2009

# La matemática: una ciencia en evolución permanente

Jaleidy Cárdenas
*Universidad de La Salle, Bogotá*, jacardenas@unisalle.edu.co

# La matemática:

## una ciencia en evolución permanente

Jaleidy Cárdenas*

Estas largas cadenas de razones, tan sencillas y fáciles, de las que se sirven los geómetras para lograr sus más difíciles demostraciones, me habían llevado a pensar que todas las cosas que pueden ser objeto de conocimiento humano, se entrelazan de la misma manera, y que, a condición únicamente de que uno se abstenga de aceptar como verdadera ninguna que no lo sea y de que se siga el orden indispensable para derivarlas unas de otras, no puede haberlas tan alejadas que no se las pueda alcanzar, ni tan escondidas que no se las pueda descubrir.
René Descartes. *Discurso del método (Segunda parte)*

## INTRODUCCIÓN

**La** evolución y el desarrollo de las matemáticas es una consecuencia del desarrollo del pensamiento humano. El proceso se inició al tratar de explicar fenómenos y, de esta manera, la teoría desarrollada sería consecuencia de las aplicaciones prácticas, pero luego, con la formalización, se abrió una nueva puerta a un espacio donde el centro de estudio sería "la matemática por la matemática". En la actualidad, las dos ramas conviven armónicamente, la matemática sigue su proceso de construcción y deconstrucción permanente e involucra en ellos todas las herramientas tecnológicas que tiene a su alcance.

Este corto escrito pretende sólo presentar algunos apartes del desarrollo histórico de la matemática a partir de la evolución de sus principales áreas. La secuencia se inicia con una exposición de los aportes más relevantes de las civilizaciones antiguas, pasando de la opera-

* Matemática, U. Nacional; Docente, Universidad de La Salle. Correo electrónico: jacardenas@unisalle.edu.co

tividad de las civilizaciones egipcia, mesopotámica y china hasta la formalidad de la civilización helénica y, finaliza, con un listado de los principales problemas que han sido objeto de estudio en el último siglo y de algunos que permanecen sin solución.

## LA MATEMÁTICA EN LAS CIVILIZACIONES ANTIGUAS

### CIVILIZACIÓN EGIPCIA

La información disponible concerniente a los desarrollos matemáticos de la civilización cimentada a lo largo del Nilo se encuentra en papiros y en inscripciones halladas en tumbas y templos. Los egipcios desarrollaron el sistema de numeración jeroglífico cuyos símbolos base eran representados por figuras humanas, animales o de objetos en general, consideraron fracciones simples de la forma $1/n$ y desarrollaron métodos de adición entre cantidades enteras y fraccionarias. En el campo de la geometría avanzaron en el cálculo de áreas y volúmenes encontrando por ejemplo una aproximación del número $\pi$, mientras que el campo del álgebra se estudiaron algunas ecuaciones sencillas de una variable.

### CIVILIZACIÓN MESOPOTÁMICA

**Se** hace referencia a la civilización que habitó entre el Tigris y el Éufrates entre los años 2000 a. C. y 200 a. C. Esta civilización usó la escritura cuneiforme sobre tablillas de arcilla, mucho más resistentes al paso del tiempo que los papiros egipcios. Utilizaron el sistema de numeración posicional sexagesimal carente de cero y en el que un mismo símbolo podía representar cantidades diversas que se distinguían por el enunciado del problema. Desarrollaron un sistema de notación fraccionaria y el concepto de número inverso, simplificando significativamente el proceso de división. Entre los aportes más sobresalientes de esta civilización se cuenta la solución de ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2+bx=c$ ($a$, $b$, $c > 0$), el estudio de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y de algunas de ecuaciones diofánticas, mostrando un mayor nivel de abstracción. En lo que se refiere a geometría, estudiaron el área del círculo y del cuadrado, así como algunas relaciones de semejanza de figuras.

### CIVILIZACIÓN CHINA

**Los** registros existentes de esta civilización son menos fiables, aunque su desarrollo haya sido sincrónico con la civilización egipcia y mesopotámica. La obra más importante en el dominio de las matemáticas está constituida por nueve capítulos en los que se encuentran 249 problemas eminentemente prácticos y de temas tan diversos que van desde la agricultura hasta la semejanza de figuras geométricas. El sistema de numeración que utilizaron fue el decimal jeroglífico junto con las operaciones habituales. Además, reconocieron la existencia de cantidades negativas aunque no las aceptaron como solución de una ecuación. Su contribución algebraica más notable es la solución de sistemas de ecuaciones lineales con un método muy similar al que actualmente se conoce como método de Gauss.

### CIVILIZACIÓN GRIEGA

**En** el declive de las civilizaciones egipcia y mesopotámica, surge con fuerza excepcional la cultura helénica que, en menos de cuatro siglos, sentó las bases formales del *imperio de las matemáticas*. Los estudiosos se agrupaban generalmente en escuelas y aunque no abandonaban los problemas de tipo práctico, fueron generando una rama independiente denominada "logística" que se ocuparía de problemas eminentemente numéricos, de cálculo y de geometría.

En la escuela pitagórica se inicia un proceso de recopilación de resultados matemáticos generales agrupados en sistemas teóricos. Es así como la aritmética se separa de la teoría de los números y se ocupa inicialmente de las propiedades y operaciones de los números naturales. Los miembros de la escuela estudiaron algunas medias y progresiones aritméticas y geométricas simples, así como propiedades de divisibilidad de los números enteros; descubrieron la asombrosa condición de irracionalidad, demostrando por ejemplo vía reducción al absurdo que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Precisamente, la necesidad de crear una teoría matemática general válida para números racionales e irracionales y la consecuente ampliación del concepto de magnitudes medibles derivó en la aparición del álgebra geométrica.

El estudio de la geometría se tornó formal y sistemático, desarrollando y perfeccionando el método de demostración geométrico. En este sentido, los avances son múltiples, entre los más destacados el teorema de Pitágoras y los tres problemas geométricos clásicos: la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo. Precisamente, el proceso de solución de estos últimos derivó en una buena aproximación numérica de $\pi$, en el descubrimiento y estudio de algunas curvas trascendentes y de las secciones cónicas, que se originaron como respuesta a las limitaciones del álgebra geométrica y cuyo estudio sistemático completo se debe a Apolonio de Perga.

Debido a que los objetos matemáticos eran percibidos como entes abstractos y al enorme desarrollo de los métodos de demostración, la matemática se presentó como una ciencia deductiva, cuyos resultados se pueden establecer a partir de un conjunto de axiomas y teoremas. La exposición sistemática de los desarrollos matemáticos en esta época tiene una obra colosal: *Los Elementos de Euclides*, una colección de trece libros en los cuales se encuentra la axiomatización de la geometría que constituye el primer sistema formal en matemáticas y el único existente durante muchos siglos.

La solución de cierto tipo de problemas, derivó en el estudio de procesos infinitos y posteriormente a los de límite y continuidad. En particular, los métodos de Arquímedes y Eudoxio sirvieron como base para lo que posteriormente se conocería como métodos infinitesimales.

La evolución en la solución de problemas de cálculo está enmarcada dentro de la época del dominio romano. Se destaca *La Métrica* de Herón de Alejandría, obra conformada por una sucesión de reglas para extraer raíces y para calcular volúmenes y áreas. Sobresalen igualmente los métodos de Diofanto, quien estudió y resolvió más de 50 clases diferentes de ecuaciones, llamadas ecuaciones diofánticas.

## LAS MATEMÁTICAS ELEMENTALES: SIGLOS VI A. C. A XVI D. C.

### EL IMPERIO ÁRABE

**El** pensamiento científico griego mantuvo un grado de unidad importante y fue ampliamente difundido, incluso después de que el emperador Justiniano cerrara las escuelas en el año 529. En el siglo VII se abre paso el extenso e impresionante imperio árabe, cuyas condiciones sociales y políticas favorecieron considerablemente el desarrollo de las matemáticas. En el siglo XV, Kashi obtuvo una asombrosa aproximación del número $\pi$ con 17 cifras exactas, trabajando con polígonos inscritos y circunscritos en el círculo. A mediados del siglo XVIII se inició el proceso de traducción al árabe de todas las obras griegas conocidas y se fundaron escuelas por todo el imperio. Dentro de las escuelas se destaca Bait Al-Hikma y su miembro más sobresaliente Mohammed ibn-Musa Al-Khowarizmi, a quien se debe la traducción al árabe del sistema de numeración hindú y el estudio de cierto tipo de ecuaciones cuadráticas y de un sinfín de elementos griegos.

La distinción explícita entre números racionales e irracionales se empezó a difuminar, dando paso a una concepción general de número real. Los trabajos árabes en el campo algebraico (siglos IX-XV) incluirían ecuaciones de primer, segundo y tercer grado, pero carecían de una notación simbólica adecuada, lo que probablemente truncó su desarrollo. Un rasgo notable en la matemática árabe es la formación de la trigonometría, el diseño de tablas de funciones trigonométricas y la relación de éstas con la astronomía.

## EL RENACIMIENTO Y MEDIOEVO EUROPEO

**Las** matemáticas en el continente europeo no tienen un origen tan antiguo como en algunos países del medio y lejano oriente. Los éxitos notorios se empezaron a alcanzar en la época del Medioevo y especialmente en la del Renacimiento. Aunque en la antigüedad algunos monjes se dedicaban al estudio de obras científicas y matemáticas clásicas, el primer paso en el proceso fue la creación de centros de enseñanza, dentro de los que fue pionero el organizado en Reims (Francia) por Silvestre II (940-1003). Sin embargo, fue necesario esperar hasta el siglo XII para que se iniciara la traducción masiva de las obras árabes y se iniciara el desarrollo matemático europeo. En el siglo XIII se destacó la figura de Fibonacci (Leonardo de Pisa) (1180-1250), autor de la célebre obra *Liber Abaci* en la que presenta la operatividad del cálculo de los números según el sistema posicional, estudia las operaciones con fracciones comunes, la regla de tres simple y compuesta y algunos problemas de progresiones y ecuaciones. Un poco menos conocido, el francés Nicole Oresmes (1328-1382), generalizó el concepto de potencia al incluir exponentes fraccionarios y sus reglas de operación, anticipándose de alguna manera al concepto de logaritmo.

En el siglo XV, Regiomontano (1436-1474) separó la trigonometría de la astronomía, abordó de manera sistemática los problemas de triángulos e introdujo además la notación de radicales y las operaciones entre ellos. Posteriormente, Jerónimo Cardano (1501-1576) introdujo un método para resolver ecuaciones de tercer y cuarto orden en su obra *Ars Magna,* estableciendo relaciones interesantes entre las raíces y los coeficientes. Por su parte, François Viète (1540-1603) estableció un sistema de símbolos organizados que permitió expresar las ecuaciones y sus propiedades de manera general, así como una relación estrecha entre la trigonometría y el álgebra. Esto último llevó a que algunos matemáticos como Nicolás Copérnico (1473-1543) y Johannes Kepler (1571-1630) se dedicaran a elaborar tablas de diversas relaciones trigonométricas.

A comienzos del siglo XVII, John Neper (1550-1617) formaliza el concepto de logaritmo en su *Canonis mirifici logarithmorum descriptio* y posteriormente en un trabajo conjunto con Henry Briggs (1561-1630) desarrollan el sistema logarítmico decimal. La teoría de funciones logarítmicas llega a su punto máximo con Leonard Euler (1707-1783).

## LA MATEMÁTICA DE LAS VARIABLES: SIGLO XVII

**En** contraposición con los trabajos solitarios desarrollados durante el siglo XVI, surgen organizaciones y sociedades científicas como las academias de Londres y de París, en cuyo seno se desarrolló una nueva y productiva forma de trabajo que, a su vez, trajo consigo la aparición de las publicaciones periódicas.

El objeto de estudio se amplía y además de considerar los números y las magnitudes como entes estáticos, se comienza a estudiar la relación de éstos con los movimientos y las transformaciones. Disciplinas como la geometría analítica, los métodos integrales y diferenciales y el cálculo de probabilidades, entre otras, comienzan a ser estudiadas de manera juiciosa y formal.

La geometría analítica se desarrolló gracias a los trabajos de René Descartes (1596-1650) y Pierre Fermat (1601-1655), quienes buscaron y lograron expresar las relaciones entre las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos en un sistema de coordenadas. En este sentido, Descartes –en la última parte de su obra célebre *Discurso del Método* denominada "Géometrie"– estudió en detalle la relación entre el álgebra y la geometría trabajando en un sistema de coordenadas. Allí mismo desarrolló una teoría general de ecuaciones llegando a concluir, sin demostración, que el número de raíces de una ecuación es igual al grado de la misma.

Simultáneamente, Fermat en su obra *Introducción a la teoría de los lugares planos y espaciales* desarrolló un sistema similar al de Descartes a partir de los trabajos de Apolonio. En este caso, los lugares planos eran aquellos representados por rectas o circunferencias y los espaciales eran los representados por cónicas. Usando la representación de Viète, Fermat identificó las ecuaciones básicas de la recta, la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola, y a continuación consideró ecuaciones cuadráticas más generales como rotaciones de estas formas básicas. Pese a lo notable del trabajo de Fermat, su obra tuvo menor incidencia que la Descartes debido a la complejidad del lenguaje matemático utilizado y a la edición tardía de ésta.

Posteriormente, Alexis Claude Clairaut (1713-1765) extendió la geometría analítica al sistema de coordenadas rectangulares tridimensional, y Leonard Euler la presentó tal como la conocemos actualmente en *Introducción al análisis de los infinitos*. El surgimiento de la geometría analítica contribuyó al desarrollo del análisis infinitesimal y se convirtió en una herramienta importante de la mecánica de Newton, Lagrange y Euler.

Los métodos diferenciales tuvieron sus orígenes en la solución de tres tipos básicos de problemas: determinación de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto específico, búsqueda de valores máximos y mínimos de funciones y determinación de condiciones de existencia de raíces múltiples de ecuaciones algebraicas. Previamente, Galileo y Torricelli habían abordado el problema de las tangentes con métodos cinemáticos, estudiando las trayectorias parabólicas que siguen los proyectiles disparados desde un punto fijo a una velocidad constante; sin embargo, los métodos diferenciales existentes tomaron su forma más clara en el trabajo de Fermat, al resolver el problema de los valores extremos de una función y el de las rectas tangentes a funciones polinómicas. Aunque a finales del siglo XVII los avances eran considerables, aún no había una distinción clara entre la operación de diferenciación y los conceptos de diferencial y derivada.

Los primeros métodos integrales desarrollados fueron los de integración definida y se presentaron de manera natural en la solución de problemas de cálculo de áreas, volúmenes y centros de masa. Los métodos de tipo infinitesimal aparecieron por primera vez en la demostración matemática de las leyes de Kepler (1615) y después en la obra *Nova esteriometría dos tonéis de Vinho*, en la cual Kepler expuso su método de utilización de magnitudes infinitesimales y los fundamentos que rigen la suma de los mismos. En ésta se destaca el trabajo de Cavalieri con su método de la geometría de los indivisibles, creado para la determinación del área de figuras planas que admitían una representación en términos de elementos de menor dimensión. Sin embargo, el método no era capaz de medir la longitud de curvas pues los correspondientes indivisibles (los puntos) carecían de dimensión. Los desarrollos en el área de la integración finita durante el siglo XVII sirvieron para resolver muchos problemas de cálculo pues involucraban un buen número de funciones algebraicas y trigonométricas. La consideración de métodos más generales dio paso al cálculo integral, donde es destacable el trabajo simultáneo e independiente de Newton con su teoría de fluxiones y de Leibniz con su cálculo de diferenciales. En este último, Leibniz empleó herramientas como la sumación de series y los sistemas de diferencias finitas e infinitesimales, dedujo reglas de integración generales y además introdujo la notación que actualmente usamos para la derivación y la integración.

La asimilación teórica de los conceptos del cálculo diferencial e integral y de la teoría de las series junto con las necesidades impuestas por la mecánica, la astronomía y la física desembocaron en la aparición del análisis infinitesimal. Fueron varios los científicos que tomaron parte en este proceso, entre los que se destacan Kepler, Galileo, Cavalieri, Torricelli, Pascal, Fermat, Descartes, Newton, Leibniz y Euler, entre otros. La etapa culminante del análisis infinitesimal se alcanzó con el establecimiento de las relaciones entre diferenciación e integración y la notable observación que ellas constituyen procesos inversos entre sí.

El creciente y fructífero desarrollo de los métodos integrales y diferenciales permitió resolver gran cantidad de problemas prácticos y difíciles durante el siglo XVII y comienzos del XVIII, dando origen en 1969 al primer manual de cálculo diferencial con aplicaciones a la geometría *Análisis Infinitesimal* de Guillaume F. L'Hôpital.

De otra parte, a mediados del siglo XVII, la teoría de probabilidades inició su proceso de formación con los problemas relacionados con procesos combinatorios. El concepto de esperanza matemática apareció en las obras de Pascal, Fermat y Huygens cuando estudiaron el problema práctico de la repartición de sueldos.

## UN INTERESANTE PROCESO DE TRANSICIÓN: EL SIGLO XVIII

**El** siglo XVIII constituye un paso intermedio entre el florecimiento del cálculo diferencial e integral y el análisis infinitesimal del siglo XVII y el rigor matemático propio del siglo XIX. Salvo dos destacadas excepciones Gauss y Euler, los matemáticos más sobresalientes en esta época fueron franceses: Monge, Lagrange, D'Alembert, Laplace y Legendre, entre otros. El análisis matemático moderno se nutrió con nuevos elementos, el cálculo de variaciones, la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y el análisis funcional, por nombrar algunos.

En este siglo, el análisis infinitesimal se centra en la creación y desarrollo de la teoría de funciones. Entre los años treinta y cuarenta, Euler elaboró de manera sistemática la teoría de funciones elementales analíticas. Posteriormente, Lagrange en su obra *Teoría de las funciones analíticas* mostró que cualquier función puede ser aproximada por polinomios a partir de su desarrollo en series de potencias, dedujo la fórmula del resto y el teorema del valor medio. Sin embargo, esta época adolece de un problema que sólo se solucionaría a finales del siglo XIX: la incapacidad de justificar el lenguaje de los límites y las operaciones relacionadas con ellos.

En 1711 Isaac Newton desarrolló la fórmula de interpolación de diferencias finitas para una función de una variable, que luego extendería Taylor al caso de infinitos términos bajo ciertas hipótesis que deberían verificar la función. Las funciones conocidas hasta ese momento se desarrollaron en series de potencias, en particular en series de Taylor, pero esto trajo consigo el problema de garantizar la convergencia de tales series. El problema fue resuelto de manera parcial al considerar las relaciones entre las series obtenidas y otras que ciertamente fueran convergentes y a la introducción de los términos residuales. Junto con las series de potencias, aparecieron nuevos tipos de desarrollos de funciones como los desarrollos en series asintóticas de Euler y Stirling.

En 1742 Johann Bernoulli escribió el primer curso sistemático de cálculo integral. El cálculo de integrales especiales, que se venía desarrollando desde comienzos del siglo, generó resultados importantes concernientes a funciones como la gamma y la beta, el logaritmo natural y las funciones elípticas, así como a la implementación del método de sustituciones complejas.

En lo que tienen que ver con las ecuaciones diferenciales, las ordinarias ya habían sido objeto de estudio previamente, mientras que las ecuaciones en derivadas parciales eran un terreno aún inexplorado. Inicialmente, cada ecuación diferencial estaba asociada a la existencia de un problema concreto, lo que dificultaba llevar a cabo un estudio general. Los primeros intentos en este sentido los hicieron Ricatti, Goldbach, Bernoulli y Leibniz alrededor de los años veinte con las ecuaciones lineales. Posteriormente, Euler publicó en 1743 la solución de una ecuación diferencial homogénea de cualquier orden usando una sustitución de tipo exponencial. D'Alembert determinó en 1766 que la solución general de una ecuación lineal no homogénea está constituida por la suma de una solución particular de ésta y la solución general de la ecuación homogénea asociada. Los mismos Euler y D'Alembert resolvieron algunas ecuaciones en derivadas parciales provenientes de algunos problemas físicos. A finales de los años setenta, Lagrange estableció un método para obtener soluciones singulares y dio una interpretación para éstas como familia de envolventes de curvas integrales. Precisamente el estudio de la familia de estas curvas integrales y la búsqueda de trayectorias envolventes e isogonales fue lo que originó una nueva rama dentro de la geometría: la geometría diferencial. El formalismo y la rigurosidad del trabajo de Euler y Lagrange dieron paso al cálculo de variaciones que, a su vez, permitió resolver una serie de problemas prácticos, como el de la braquistócrona o el de las líneas geodésicas sobre una superficie, que no se habían podido solucionar con las herramientas del análisis infinitesimal. Euler publicó en 1744 el que se puede considerar el primer libro de cálculo de variaciones y en el que se presenta la formulación y generalización de más de 60 problemas de variaciones unidimensionales, estableciendo de paso una estrecha relación con la mecánica y la física.

Durante el siglo XVIII se destaca el desarrollo de algunas ramas clásicas de la geometría: la geometría analítica, la geometría diferencial y la geometría proyectiva, así como la interpretación geométrica del cálculo infinitesimal. Los trabajos de Fermat y Descartes en el campo de la geometría analítica (en el plano) fueron seguidos por el de Newton en su obra *Enumeración de las curvas de tercer nivel* (1704) donde hace una clasificación rigurosa y detallada de las curvas según el número de puntos de intersección con una recta, obteniendo que todas se pueden representar por sólo cuatro tipos de ecuaciones. Varios matemáticos se ocuparon del estudio de las curvas de tercer nivel, entre ellos Stirling, Maclaurin, Maupertius y Steiner, pero fue Euler en el segundo tomo de *Introducción al análisis infinitesimal*, quien formalizó la geometría analítica en el plano, introdujo el sistema de coordenadas cartesianas en el espacio, las oblicuas y las polares, así como las transformaciones de estos sistemas, además clasificó y estudió las curvas según el grado de sus ecuaciones y se ocupó de algunas funciones trascendentes.

El estudio de objetos geométricos, curvas planas y espaciales y superficies utilizando herramientas del cálculo diferencial es la base la geometría diferencial. La transición entre la geometría bidimensional y la tridimensional se debe principalmente a Clairaut, aunque su trabajo se ve opacado por el de Euler, quien en este campo desarrolló una completa teoría de superficies, obteniendo en particular la ecuación diferencial de las líneas geodésicas sobre una superficie.

Los métodos de la geometría descriptiva alcanzan un buen nivel de madurez con *Géometrie descriptive* de Monge, en donde establece el objetivo y el método de la geometría descriptiva al considerar construcciones con planos tangentes y normales a superficies, intersección de superficies curvas y propiedades de la curvatura. De otra parte, el análisis de diversos métodos de proyección y el estudio de las propiedades proyectivas de los objetos geométricos constituyeron los fundamentos de la geometría proyectiva, donde se destacaron los trabajos de Desargues y Pascal.

La relación entre álgebra, geometría y cálculo fue tratada inicialmente en 1707 por Newton en su obra *Aritmética Universal*, donde la idea central sería reducir la solución de un problema para resolver una ecuación algebraica que lo represente. En el libro se encuentran las identidades de Newton para sumas de potencias de raíces de una ecuación algebraica y un teorema que permite determinar el número de tales raíces. Los trabajos posteriores (Halley, Lagrange, Fourier, Maclaurin) giraron alrededor de la solución numérica de ecuaciones algebraicas hasta que en 1768 Euler publicó la *Aritmética Universal*, un tratado en que se estudian un sinnúmero de resultados relacionados con la solución de problemas aritméticos, los números poligonales, las proporciones y las progresiones y además se formaliza la notación simbólica del álgebra y se introduce la de los logaritmos. Euler estableció los fundamentos formales de la teoría de números a partir de los teoremas de Fermat utilizando métodos algebraicos y aritméticos y estudiando exhaustivamente los métodos de divisibilidad y la congruencia de números módulo *n*. Además trabajó en análisis diofántico y en la búsqueda de métodos analíticos que permitieran determinar la distribución de los números primos, en una labor simultánea a la de otros matemáticos como Legendre, Chebyshev, Waring y Lagrange.

En el siglo XVIII, el desarrollo de la teoría de probabilidades se debe principalmente a Laplace y a su obra *Teoría analítica de las probabilidades*, publicada en 1812. Inicialmente, la teoría de probabilidades se basaba en el análisis combinatorio pero posteriormente estaría regida por la teoría de límites. El cálculo de probabilidades fue un tema tratado por Bernoulli, Euler, Simpson, Condorcet, Legendre y Gauss, y es notable en esta época la publicación de las leyes de Bayes y la elaboración del método de mínimos cuadrados.

## SIGLO XIX: EL SIGLO DE ORO DE LAS MATEMÁTICAS

**La** cantidad, la calidad y el nivel de los desarrollos matemáticos que se alcanzaron en esta época hacen del siglo XIX un periodo de especial relevancia en la historia de la matemática. En álgebra sobresalen los trabajos de Niels H. Abel y Evariste Galois quienes introdujeron los conceptos generales de la teoría con un novedoso grado de abstracción entre los que se destaca la noción de grupo. Nikolái Lobachevsky, János Bolyai y Carl F. Gauss fundamentaron la geometría no hiperbólica no euclidiana, lo que trajo consigo una serie de transformaciones en todo el campo de la geometría. Las bases del análisis matemático sufrieron una reestructuración substancial con la creación de la teoría de número real y de la teoría de los límites y, al final del siglo, con lo que se conoce como el aparato épsilon-delta. Además se hizo una diferenciación explícita en el estudio de funciones de variable real y de variable compleja.

El desarrollo matemático de esta época estuvo marcado por la necesidad de fundamentar las matemáticas en conjunto, motivando una revisión de los conceptos primarios y elementales. Asimismo, estuvo influenciado en gran medida por las exigencias de las ciencias afines lo que hizo que las aplicaciones de las teorías desarrolladas ocuparan un lugar destacado dentro de ese proceso evolutivo.

El problema fundamental del álgebra durante el siglo XIX fue la teoría general de las ecuaciones algebraicas. En este periodo se introdujo el concepto de grupo como base del álgebra moderna, se estudió el problema de solubilidad en radicales de ecuaciones de grado mayor que cinco y se cimentaron las bases de la teoría de Galois, siendo los matemáticos más destacados Karl F. Gauss, Niels H. Abel y Evariste Galois. Gauss estudió diversos tipos de ecuaciones algebraicas y dio tres demostraciones diferentes del teorema fundamental del álgebra, enunciado previamente por Descartes. Abel, por su parte, estudió algunas propiedades de las funciones analíticas y de funciones especiales como las hiperbólicas y elípticas y, además, demostró la irresolubilidad en radicales de las ecuaciones de quinto grado, aunque no pudo establecer un criterio de solubilidad en radicales en el caso general. Galois resolvió el problema estudiando la solubilidad en radicales de ecuaciones polinómicas e introduciendo un andamiaje algebraico en el que se relacionan las propiedades de las ecuaciones, los números algebraicos y los grupos y que posteriormente se convirtió en la base del álgebra moderna.

Específicamente, la teoría de grupos fue desarrollada de forma independiente y más o menos simultánea por Galois y Paolo Ruffini, y en sus inicios estuvo orientada al estudio de grupos finitos. En los trabajos de Arthur Cayley y de Camille Jordan los conceptos relativos a la teoría de grupos se vuelven mucho más abstractos y se establecen las relaciones de los grupos finitos con la teoría de números, la teoría de funciones y la geometría algebraica. La solución del problema de la clasificación de todas las redes cristalinas por parte de E. Fiedorov constituye una muestra de las aplicaciones de la teoría de grupos, que al final del siglo XIX fue extendida a grupos infinitos tanto discretos como continuos, en gran parte gracias a la labor de Sophus Lie y Félix Klein.

De la relación entre la teoría de sistemas de ecuaciones lineales y la teoría de matrices y determinantes surgió el álgebra lineal. Es notable el estudio en la segunda mitad del siglo de los invariantes de ecuaciones y de la teoría de las formas, que luego tendría aplicaciones interesantes en la geometría diferencial, la geometría algebraica y la mecánica.

El análisis matemático estaba constituido por un conjunto de procedimientos y métodos de solución a una gran diversidad de problemas y en su interior se distinguían claramente tres ramas: el cálculo diferencial, el cálculo integral y las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, el eje del análisis matemático en esta época es el concepto del límite, ya que con base en él se justifican todas las demostraciones que involucran infinitesimales. Gracias a los trabajos de Augustin-Louis Cauchy –*Curso de análisis* (1821), *Resumen de conferencias sobre el cálculo de infinitesimales* (1823) y *Conferencias sobre aplicaciones del análisis a la geometría* (dos tomos 1826,1828)– se reconstruye secuencialmente el análisis matemático con base en la noción de límite. En su obra, Cauchy estudia las funciones elementales de variable real y compleja, las series infinitas y sus criterios de convergencia e introduce por primera vez una magnitud infinitesimal como una variable cuyo límite es cero. La aplicación del análisis matemático fue especialmente evidente en los campos de la física y la mecánica, destacándose los trabajos relacionados con la investigación de fenómenos electromagnéticos y de conductividad del calor y en los que participaron científicos notables como Green, Stokes, Thomson, Hamilton y Maxwel, entre otros.

El trabajo más destacado en la teoría de funciones se debe a Bernhard Bolzano, quien estudió con detalle las propiedades de las funciones continuas y en particular estableció el conocido teorema de Bolzano: "Una función continua toma todos los valores comprendidos entre su mínimo y su máximo". Además, amplió el conjunto de curvas continuas a partir del método de acumulación de singularidades construyendo funciones interesantes como la función de Bolzano, una función continua que tiene derivada en ningún punto.

Un problema de vital importancia para una formulación correcta del análisis era establecer una teoría formal y rigurosa de número real. En esta titánica empresa trabajaron notables matemáticos como George Cantor, Richard Dedekind, Karl Weierstrass y Heinrich E. Heine. Dedekind consideró una representación geométrica de los números reales en forma de una línea recta y definió un número real como una cortadura en el conjunto de los números racionales, mientras que Cantor por su parte definió un número real como un límite de una sucesión convergente de números racionales. A Cantor también se debe la demostración de no equivalencia de los números reales y los racionales (en lo que respecta a la cardinalidad) y el desarrollo de la teoría abstracta de conjuntos. Precisamente, cuando en el proceso de fundamentación de la teoría de conjuntos se utilizaron técnicas de límites, se dio paso a la formación de una nueva rama: la lógica matemática.

La teoría general de la variable compleja fue estructurada durante el siglo XIX. Aunque históricamente el concepto de número complejo estaba ampliamente difundido y era usado en muchas aplicaciones prácticas, la precisión de los conceptos y la interpretación gráfica de éstos son propias de esta época. Los trabajos de Gauss de 1831 y 1880 contienen la fundamentación teórica y geométrica de los números complejos, la definición de integral en el plano complejo y el desarrollo de una función analítica en series de potencia. Justamente la integración el plano complejo se convirtió en una potente herramienta para resolver integrales definidas y luego fue utilizada por Laplace para resolver ecuaciones diferenciales y en diferencias a través de lo que se conoce como la transformada de Laplace. Durante el periodo comprendido entre 1825 y 1829, Cauchy elaboró una teoría completa de funciones de variable compleja y la relacionó con elementos del análisis infinitesimal, utilizó magnitudes imaginarias en el cálculo de integrales definidas, mostró el teorema integral (conocido actualmente como el teorema de Cauchy) y presentó la teoría de residuos. Posteriormente, en la segunda mitad del siglo XIX, Riemann estudió la forma como las condiciones en la frontera determinan la analiticidad de una función y, con base en la interpretación geométrica de las funciones complejas, desarrolló el concepto de superficies de Riemann. Por otro lado, W orientó su trabajo en teoría de variable compleja en un sentido netamente analítico, elaborando un sistema de fundamentación lógica y rigurosa a partir de la axiomatización de los números reales.

En lo que se refiere a la geometría, los desarrollos fundamentales en el siglo XIX se concentraron en la creación y estructuración de la geometría no euclideana, principalmente a cargo de Nicolai I. Lobachevski y Janos Bolyai. La prueba del teorema de las paralelas de Euclides fue el punto de partida del estudio de Lobachevski, quien después de darse cuenta de la imposibilidad de la demostración lo sustituyó por su negación: "Por un punto no contenido en una recta se puede trazar más de una paralela que yace en el mismo plano de la primera". Dada la trascendencia polémica del resultado, la geometría desarrollada con base en él se mantuvo marginada durante décadas hasta que fue integrada por las teorías de Riemann.

## EL CONTRASTE ENTRE LA ABSTRACCIÓN RIGUROSA Y EL USO DEL COMPUTADOR: SIGLO XX

**Los** desarrollos de la matemática de este siglo son sustancialmente significativos. A manera de síntesis consideraremos sólo algunos en el campo de la matemática pura, la matemática aplicada y la relación entre la matemática y los ordenadores.

### MATEMÁTICA PURA

**En** topología se destaca la demostración del teorema del punto fijo de Brouwer (1910), la clasificación de las superficies tridimensionales de Thurston (1982) y el descubrimiento de las estructuras exóticas de Milnor (1956). En lógica y teoría de conjuntos el teorema de incompletitud de Gödel (1931) y el teorema de independencia de Cohen (1963), mientras que en álgebra se destaca la clasificación de los campos de Steinitz (1910) y de los grupos finitos de Gorenstein (1972). En teoría de los números, algunos logros notables son la introducción de los números trascendentes de Gelfond (1929) y la demostración de Wiles del último teorema de Fermat (1995) y en análisis la incursión de las distribuciones de Schwartz (1945).

### MATEMÁTICA APLICADA

**En** teoría de juegos y del equilibrio general, entre los resultados más importantes se cuentan el teorema de minimax de Von Neumann (1928) y el teorema de existencia de Arrow y Debreu (1954). En cristalografía se destaca el estudio de los grupos de simetría de Bieberback (1910), y en teoría de optimización el método del simplex de Dantzig (1974); en análisis funcional, la axiomatización de la mecánica cuántica de Von Neumann (1932); en sistemas dinámicos, el teorema KAM (1962), y en teoría de nudos, los invariantes de Jones (1984).

### LAS MATEMÁTICAS Y EL COMPUTADOR

**La** posibilidad de representar gráficamente objetos matemáticos complejos como los fractales (1980) pone en evidencia lo valiosa que es esta relación. Sin embargo, no se trata sólo de un apoyo visual para superar las limitaciones de la imaginación, la demostración asistida por un ordenador del teorema de los cuatro colores de Appel y Haken (1976) es una muestra sin igual de cómo el computador puede llegar a ser una herramienta de gran utilidad para la construcción y el desarrollo de la matemática formal.

### ¿PROBLEMAS SIN SOLUCIÓN?

**En** una ciencia tan amplia, rica y diversa como la matemática, es apenas natural que los que se ocupan de ella planteen conjeturas, intenten demostrar las ya planteadas y desarrollen nuevas herramientas en un intento por dar solución a los problemas propuestos. Dentro de los problemas que no han sido resueltos, se destacan el problema de los números perfectos, formulado en el año 300 a. C., la hipótesis de Riemann (1859), la conjetura de Poincaré (1904) y el problema P = NP (1972).

## REFERENCIAS

Boyer, C. B. *Historia de la Matemática*. Madrid, Alianza Editorial, 1986.

Campos, A. *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*. Bogotá, Editor Alberto Campos, 1994.

Newman, J. R. *SIGMA. El mundo de las matemáticas 1*. Barcelona, Ediciones Grijalbo S.A., 1979.

Odifreddi, P. *La matemática del siglo XX, de los conjuntos a la complejidad*. Buenos Aires, Katz Editores, 2006.