Revista de la Universidad de La Salle

Volume 1998 | Number 27 Article 9

January 1998

Elementos de la teoría del conteo

Antonio Velasco Muñoz
Universidad de La Salle, Bogotá, revista_uls@lasalle.edu.co

Elementos de la teoría del conteo

Antonio Velasco Muñoz
Licenciado en Educación
Magíster en Estadísticas Matemáticas,
Especializado en Matemática y Física
Director Especialización Análisis de Datos
Universidad De La Salle

Resumen

En las aplicaciones de la Matemática Discreta, de los modelos de probabilidad y de la definición de bases de datos, es importante utilizar representaciones que minimicen el uso de símbolos, sin sacrificar la estructura de la información que se desea manejar. Es necesario, por lo tanto, aprender a "contar" sin necesidad de hacer la lista física de todas las posibilidades en un caso concreto dado.

En este artículo se presenta en forma simple la solución a dicho problema y se ilustra con ejemplos sencillos.

Además cuando se definen modelos de probabilidad en un conjunto finito de objetos, se requiere calcular el número de subconjuntos, o de muestras de un conjunto con determinadas propiedades para poder medir la probabilidad de un evento dado.

Criterios para clasificar muestras

Cuando se seleccionan objetos o símbolos de un conjunto finito, se tienen en cuenta los dos criterios:

ORDEN: Indica que la posición de un objeto en la muestra se tiene en cuenta y distingue las muestras obtenidas.

REPETICION: Indica que un objeto o elemento del conjunto seleccionado puede volver a aparecer en la misma muestra.

De acuerdo a estos dos criterios se tienen cuatro tipos de muestras, a saber:

1) MUESTRAS CON ORDEN Y REPETICION M.O.R.
2) MUESTRAS CON ORDEN Y SIN REPETICION M.O.R'
3) MUESTRAS SIN ORDEN Y CON REPETICION M.O'.R.
4) MUESTRAS SIN ORDEN Y SIN REPETICION' M.O'.R'

Enunciado del problema a resolver

Dado un conjunto con N símbolos se desea calcular el número de muestras (de cada una de las cuatro clases) de tamaño *K* que se pueden formar con elementos del conjunto dado. (Con N mayor de 1 y *K* enteros no negativos).

Para calcular la respuesta correcta se presenta esta sección donde se expone la teoría básica del conteo y ejemplos ilustrativos para cada caso.

Principio Fundamental

Sean A y B subconjuntos finitos con n y m elementos respectivamente.

Sea AxB el producto cartesiano de A por B el cual es el conjunto de todas las *parejas ordenadas* que se pueden formar con su primer elemento en A y el segundo en B.

Entonces si # indica "el número de elementos distintos de un conjunto" se tiene que:

$$\#(AxB) = \#(A) \times \#(B)$$

Ejemplo: Si A = {1,2} y B = {a,b,c} entonces se tiene que

$$\#(AxB) = \#(A) \times \#(B) = 2 \times 3 = 6$$

En efecto el número de parejas AxB es 6.

Caso 1) M.O.R.

Esta clase de muestras son las llamadas *K-uplas* ordenadas, que se pueden formar con N símbolos y se puede encontrar su número aplicando directamente el Principio Fundamental.

Si disponemos de *K* posiciones para colocar en cada una de ellas uno de los N símbolos tenemos para cada posición N posibles símbolos que pueden repetirse en otras posiciones, con lo cual se obtiene que hay N^k, K-uplas ordenadas.

En el caso A=B para k=2 se obtiene $N.N=N^2$.

Ejemplos :

- En los computadores se usa la *extensión* en el nombre de un archivo como un apellido para clasificarlo.

Si se usan tres letras del abecedario inglés de 26 letras, mas el espacio (blanco) entonces el número de extensiones para usar serían $27^3=19683$.

- Si un bit es un espacio para colocar 1 ó 0 entonces si usamos 8 bits para formar un byte se puede disponer de 2^8 posibilidades para representar con un byte.

Caso 2) M.O.R'.

En este caso si selecciona un símbolo para colocarlo en una posición de la muestra, no se puede seleccionar en las posiciones siguientes, ya que no hay repetición, por consiguiente para la primera posición hay N posibilidades, para la segunda $N-1$, para la tercera $N-2$ y así hasta seleccionar K.

Por lo tanto, el número total de muestras en este caso es $N(N-1)....(N-K+1)$.

El símbolo $_NP_K$ indica ese número de permutaciones de tamaño K usando N símbolos. Si usamos el factorial de un entero no negativo se tiene:

Ejemplo: Si en el ejemplo de las extensiones de los archivos quiero usar letras y símbolos pero sin repetir símbolo entonces se debe calcular el número de permutaciones de 3 símbolos y el resultado es:

$$_{27}P_3=27.26.25=17550$$

Con el resultado anterior se obtiene una diferencia de *2.133* casos lo que corresponde a las extensiones de archivos con al menos una repetición de símbolo.

Para resolver el caso 3) es necesario resolver primero el caso 4) que corresponde a Muestras sin orden y sin repetición.

Caso 4) M.O'.R'

Una muestra sin orden y sin repetición es como una permutación en la cual no se tiene en cuenta el orden y por lo tanto se deben descontar todos los casos que tienen los mismos elementos pero en diferente orden y se deja solo uno de ellos, para que los represente.

El número de casos que se repiten son $K!$ que corresponden a las distintas posiciones según el orden pero tienen los mismos símbolos. Por tanto, al dividir el número de permutaciones se deben dividir por $K!$ con lo cual se resuelve el problema de combinaciones de K objetos elegidos dentro de N objetos. También corresponde al número de subconjuntos de k elementos que se pueden formar de un conjunto de N elementos.

En resumen se tiene:

con la condición de que *K* debe ser un entero no negativo menor o igual que *N*.

Ejemplo: En un curso de universidad se debe conformar un grupo de 4 estudiantes para que elaboren un informe de actividades del semestre anterior. Si en el curso hay 18 estudiantes, de cuántas formas se puede elegir ese grupo?

Este caso es una combinación y por tanto la solución es:

$${}_{18}C_4 = 18!/(4!14!) = 3060$$

El caso 3) M.O'.R.

Para solucionar este caso se trata como una combinación con repetición, para lo cual se razona de la siguiente manera:

Sean los conjuntos A y B

$A=\{s_1, s_2, \ldots s_N\}$ el conjunto de N símbolos y $B=\{s_1, s_2, \ldots s_N, c_1, c_2, \ldots c_{(k-1)}\}$

donde los c_i son "comodines" los cuales permiten asignar símbolos repetidos y lograr de esta manera la muestra deseada. Observe que hay sólo k-1 comodines para que en el peor de los casos la muestra tendría todos los comodines más uno de los otros símbolos el cual le daría valor a todos los comodines.

La solución es aplicar el caso anterior como una combinación de *K* elementos del conjunto *B*.

Se puede simbolizar y expresar el número de muestras en este caso, de la siguiente manera:

$${}_{N}CR_K = {}_{(N+K-1)}C_K$$

Ejemplos:

- Se disponen de 3 escritorios para repartir a 5 colegios de un municipio. Si se pueden asignar cualquier número a cualquier colegio del municipio, ¿de cuántas maneras se pueden distribuir dentro de los cinco colegios?

A pesar de que en la realidad se distribuyen los escritorios, para encontrar la solución se deben seleccionar los colegios a los cuales se les asignarán los escritorios.

Si $A=\{1,2,3,4,5\}$ el conjunto que indica la numeración de los colegios dentro del municipio, se deben elegir *combinaciones con repetición* de *A* de tamaño *3*.

La respuesta nos indica el número de posibilidades que se tienen en este caso y es:

$${}_{5}CR_3 = {}_{(5+3-1)}C_3 = 35$$

- Si se considera el juego del dominó como muestras de tamaño 2 de los siete símbolos blanco, uno dos, tres, cuatro, cinco, seis, se observa que en este caso se tiene una ***muestra sin orden pero con repetición***. Por lo tanto el número de "fichas" de dominó son $_7CR_2 = {}_{(7+2-1)}C_2 = 28$ ♦