Revista de la Universidad de La Salle

Volume 1996 | Number 22 Article 16

January 1996

# Inversa Generalizada de una Transformación Lineal

Dr. Antonio Velasco Muñoz
*Universidad de La Salle, Bogotá*, revista_uls@lasalle.edu.co

# Inversa Generalizada de una Transformación Lineal

*Dr. ANTONIO VELASCO MUÑOZ*
*Director Especialización Análisis de Datos*
*Universidad De La Salle.*

## Introducción

En este artículo se presenta una explicación sobre una inversa generalizada de una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita. Se destacan los conceptos necesarios para una adecuada relación con los conceptos de inversa generalizada en las matrices, la composición de transformaciones lineales y la definición de una inversa generalizada de una transformación lineal dada.

## Conceptos básicos

Sean **V** y **M** espacios vectoriales sobre el mismo campo **K** de dimensiones **n** y **m** respectivamente.

- Una función **T** de **V** en **M** es una transformación lineal si y solo si:

a) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \ \forall \ v_2 \in v$

b) $T(\propto_v) = \propto T(v) \ \forall \ \propto \in R \ \ \forall \ v \in V$

- Dada una transformación lineal **T** de **V** en **W** los subconjuntos Núcleo y Rango de **T**:

a) $N_T = T^{-1}(\{0\}) = \{ v \in V \mid T(v) = 0 \} \subseteq V$

b) $R_T = T(V) = \{ w \in W \mid T(v) = W$

para algún $v \in V\} \subseteq W$
son subespacios vectoriales de **V** y **M**.

- Es espacio vectorial **V** se puede escribir como suma directa de dos subespacios donde uno de ellos es el núcleo de **T** $\mathbf{N_T}$ y un subespacio complementario **S**.

$V = N_T \oplus S$

Esta propiedad se demuestra por recurrencia.

Si $N_T = V$ la propiedad se tiene.

Si $N_T \neq V$ entonces sea $v_1 \in V - N_T$ y considere el **subespacio generado** por el vector $v_1$ simbolizado por $[v_1]$.

Considere ahora el subespacio $V_1 = N_T \oplus [v_1]$.

Si $V_1 = V$ entonces se termina el procedimiento ya que la suma es directa pues $v_1$ no esta en el núcleo de T. En caso contrario se elige otro vector $v_2 \in V - V_1$ y se considera el subespacio generado por $v_1$ y $v_2$ llamado $V_2 = [ v_1, v_2]$.

Si $V_2 = V$ entonces se termina el procedimiento y con el mismo argumento del paso anterior se tiene que la suma es directa. En caso contrario se continua el procedimiento descrito y como **V** es de dimensión finita este termina después de un número finito de pasos. Esta parte indica la forma de elegir el Subespacio complementario al Núcleo de transformación lineal **T**.

- El espacio vectorial **V** se puede por lo tanto escribir como **suma directa** del Núcleo de **T** $N_T$ y el subespacio complementario S por lo tanto se tiene que:

$V = N_T \oplus S$

y además
$\dim V = \dim N_T + \dim S$

- Para cualquier vector v de **V** existen vectores únicos **n** y **s** tales que:

$v = n + s$ donde $\mathbf{n} \in N_T$ y $s \in S$.

Además
$T(v) = T(n) + T(s) = T(s) \in R_T \subseteq W$

y se cumple por tanto que
$T(V) = T(S) = R_T$

- Si $\{ s_1, s_2, \dots s_r \}$ es una base de S entonces el subconjunto de W $\{ T(s_1), T(s_2), \dots T(s_r) \}$ es también una base de T(S). Este resultado y su demostración es conocido.

- Si **T** es una transformación lineal de **V** en **V** entonces las tres propiedades siguientes son equivalentes.

a) **T** es inyectiva

b) $N_T = \{ 0 \}$

c) $\dim T(V) = \dim V$

este resultado es conocido.

- La forma de asociar matrices para representar transformaciones lineales depende de:

a) De los conjuntos **base** tanto en el dominio como en codominio de la transformación,

b) De la definición de la transformación lineal.

Se usa el esquema siguiente cuando se consideran espacios vectoriales basados en los números reales R:

$$T: R^n \text{----------}> R^m$$
$$x >\text{----------}> A\,x = T(x)$$

cuando la matriz A es de **m** filas por **n** columnas y corresponde a la matriz asociada a la transformación **T** respecto a las bases de $R^n$ y $R^m$ elegidas previamente.

Cuando se consideran las coordenadas en espacios vectoriales de dimensión finita una transformación lineal entre ellos es isomorfa al esquema anterior, usando los vectores de coordenadas respecto a las bases en consideración. Estos resultados son tradicionales y se enuncian para su posterior uso.

- Si se considera la composición de dos transformaciones lineales su representación matricial corresponde al producto de las matrices asociadas a cada una de las transformaciones lineales que forman la composición. El siguiente esquema presenta lo antes expuesto:

$$V \xrightarrow{T_1} W \xrightarrow{T_2} U$$

$$x \text{-----}> T_1(x) \text{-----}> (T_2 \circ T_1)_{(x)} = T_2(T_1(x))$$

- Si $A_1$ y $A_2$ son las matrices asociadas a $T_1$ y a $T_2$ respectivamente entonces la matriz $A_2A_1$ es la matriz asociada a la composición entre $T_1$ y $T_2$ o sea $T_2 \circ T_1$.

- En la teoría clásica de las matrices se tiene que si AB=I donde I es la matriz idéntica y A y B son cuadradas entonces $B = A^{-1}$ y $A = B^{-1}$. En este caso diremos que las matrices A y B son no-singulares y las transformaciones lineales asociadas no biyecciones con lo cual una es la inversa como función de la otra y viceversa.

## Inversa Generalizada de Matrices y transformaciones lineales

Se conoce que una inversa generalizada de una matriz A de p filas por q columnas es una matriz G de q filas por p columnas tal que:

$$A\,G\,A = A$$

Observe que si A es no-singular entonces G es $A^{-1}$

La idea central de este artículo es definir una transformación lineal T- tal que se cumpla la siguiente igualdad:

$$T \circ T^- \circ T = T$$

El procedimiento a seguir es el siguiente:

a) Si **T** es la transformación lineal de **V** en **W** considere la partición natural definida por T.

Lo anterior quiere decir que para cada $\omega \in T(V)$ se determina un subconjunto de **V** denotado por $E\omega$ definido de la siguiente manera:

$E\omega = \{ x \mid T(x) = \omega \} = \{ x \mid T(x)$

$= T(\propto) = \omega \} = E \propto \in V$

En esta representación se pueden considerar los subconjuntos de **V** indixados de **W** o en **V** según convenga.

Como propiedad de los subconjuntos se tiene que:

$\cup_{\alpha} E_{\alpha} = V$ y además $E_{\alpha} \cap E_{\beta} = \phi$

si $E_{\alpha} \neq E_{\beta}$ $\alpha, \beta \in V$.

Lo anterior corresponde a la partición generada por la relación de equivalencia "tener la misma imagen" en la transformación lineal T.

Además la clase $E_0$ es el núcleo de la transformación **T** y es por tanto y subespacio vectorial de **V**.

En general $E_{\alpha}$ no es un subespacio si $\alpha$ es diferente de 0 pero forman los conocidos subespacios afines a $E_0$ (paralelos).

b) si S es el subespacio complementario $E_0$ entonces consideremos el subconjunto S Ç $E_a$ con a Î V.

Sea $x \in V$ arbitrario entonces existen **n** y **s** con $x = n + s$ con $n \in N_T$ y $s \in S$

La imagen de x por T, $T(x) = T(s)$ ya que $T(n) = 0$

Sea ahora $x \in S \cap E_{\alpha}$ podemos escribir que $T(x) = T(s) = T(\alpha)$ por lo cual **s** y $\alpha$ pertenecerían a $E_{\alpha}$.

Sean ahora **x** y **y** vectores de $S \cap E_{\alpha}$.

Entonces el vector $x - y \in N_T = E_0$.

Lo cual implica que los vectores **s(x)** y **s(y)** de **S** son iguales y por tanto **x** y **y** también lo son. Esto último nos indica que $S \cap E_{\alpha} = \{s(\alpha)\}$ es unitario.

c) Definición de $T^-$

Definimos la transformación $T^-$ así:

$T(V) \text{------>} V$

$\omega \text{------>} T^-(\omega) = s(x)$ si $T(x) = \omega$

Observe que es una función bien definida ya que la intersección $S \cap E_{\alpha}$ es un conjunto unitario para todo $\alpha$ de V.

Es lineal ya que

si $\omega = T(x)$ y $\omega' = T(x')$ entonces

$T^-(\omega + \omega') = s(\omega + \omega') = s(\omega) + s(\omega')$

$= T^-(\omega) + T^-(\omega')$

Es muy fácil completar la demostración de la linealidad de $T^-$ respecto a la propiedad con los escalares.

Por último se tiene que el recorrido o rango de $T^-$ es el subespacio **S**.

Al considerar el siguiente diagrama se tiene que:

$T \circ T^{-} \circ T = T$

$$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{T^{-}} V \xrightarrow{T} W$$

$v$ >----> $T(v)$ >-----> $T^{-}(T(v)) =$

$s(v)$ >---------> $T(s(v)) = T(v)$

T

## Ejemplo

Sea $V = W = R^2$

Considere la transformación lineal **T** definida así:

$T(x_1,x_2) = (x_1,x_1)$ usando las bases canónicas en **V** y W.

a) $T(V) = \{(y_1,y_2) \mid (y_1,y_2) = (x_1,x_1) = x_1 (1,1)\}$

que corresponde al subespacio generado por el vector (1,1).

b) $E\alpha = \{ (x_1,x_2) \mid T(x_1,x_2) = T(\alpha_1\alpha_2) \}$

$= \{ (x_1,x_2) \mid T(x_1,x_2) = (x_1,x_1)$

$= \alpha_1(1,1) \}$

$= \{ (x_1,x_2) \mid x_1 = \alpha_1, y, x_2 \in R\}$

$= \{(\alpha_1, x_2) \mid x_2 \in R\}$

$= \{ (\alpha_1,0) + (0,x_2) \mid x_2 \in R\}$

$= \{\alpha_1(1,0) + x_2(0,1) \mid x_2 \in R\}$

que corresponde al subespacio a fin al subespacio generado por el vector (1,0).

c) $E_0$ es el Núcleo de la transformación lineal **T** y corresponde al subespacio generado por el vector (0,1).

d) Se escribe el subespacio afin así:

$E_\alpha = \alpha + E_0$

e) Sea S cualquier subespacio de **V** tal que $S \oplus E_0 = V$. En este caso cualquier subespacio de **V** distinto del núcleo de **T**. (Hay infinitas posibilidades).

Sea $S = \{ s,(1,-1) \mid s \in R \}$. El elemento típico de $S \cap E_\alpha$ es:

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ entonces
$T(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_1) = T(\alpha_1, \alpha_1)$

pero como debe pertenecer a S entonces $\alpha_2 = -\alpha_1$ lo cual nos permite definir una transformación lineal generalizada $T^{-}$ así:

$T^{-}(y,y) = (y, -y)$ si $y \in R$.

Si se considera la matriz asociada a esta transformación respecto a las bases canónicas se obtiene una matriz G que es una inversa generalizada de la matriz A asociada a la transformación inicial **T**.

Por último si se considera otro subespacio **S** como el generado por el vector (1,2) se obtienen otra inversa generalizada de **T** cuya definición corresponde a:

$T_1^-(y, y) = (y, 2y)$ si $y \in R$

En la gráfica que se presenta se ilustra el ejemplo presentado.

En la bibliografía de este tema se precisan formalmente los conceptos de inversa generalizada de matrices pero no se presentan en forma didáctica su relación con las transformaciones lineales. Suplir esa deficiencia es uno de los propósitos de este artículo.

## Bibliografía


SEARLE S.R. Linear Models John Wiley & Sons, Inc. New York 1971.

LEBART L., MORINEAU A., TABARD N. Techniques de la description statistique, Paris Dunod 1984.

SANCHEZ R., VELASCO A., Curso Básico de Algebra Lineal. Trillas Santafé de Bogotá, 1994.♦


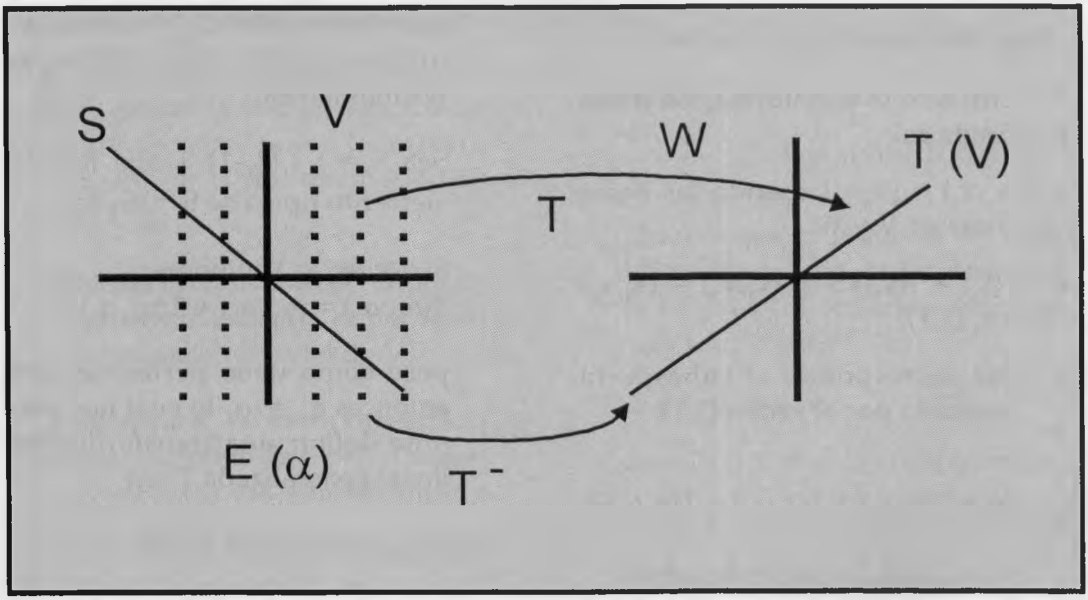


Gráfico No. 1